

Versuch einer dynamischen Theorie der Sonnenatmosphäre

Von F. SCHMEIDLER

Von der Universitäts-Sternwarte München

(Z. Naturforschg. 5a, 297–308 [1950]; eingegangen am 27. März 1950)

Es wird versucht, die ungleichmäßige Rotation der Sonne als atmosphärisches Strömungsphänomen im Sinne von Bjerknes zu deuten. Die beobachteten Meridionalströmungen in der Sonnenatmosphäre beweisen die Existenz einer Zirkulation zwischen dem Äquator und den Polen. Es wird angenommen, daß die Sonne einen mit der raschen Äquatorgeschwindigkeit rotierenden Kern besitzt. Die hydrodynamischen Gleichungen werden durch Streichung numerisch kleiner Glieder vereinfacht; bei der Integration dienen die beobachteten Strömungen als Randwerte. Dann ergibt sich als mögliche Erklärung der ungleichmäßigen Rotation die Annahme des Zusammenwirkens von drei Kräften: die durch das rotierende Koordinatensystem verursachte Coriolis-Kraft, die turbulente Reibung der Gasmassen und eine von den Polen zum Äquator gerichtete äußere Kraft, deren physikalische Natur unbestimmt bleibt. Wenn sie durch einen Temperaturunterschied zwischen Pol und Äquator zustandekommt, ist dieser sicher kleiner als 100° . Kinematisch besteht das Bild einer geschlossenen meridionalen Zirkulation, der die durch die Coriolis-Kraft verursachte Ablenkung überlagert ist.

Die Tatsache, daß gasförmige Himmelskörper ungleichmäßig rotieren, indem ihre Winkelgeschwindigkeit mit der Breite variiert, hat Anlaß zu vielen Untersuchungen gegeben. Beim Planeten Jupiter zeigen die neueren Beobachtungen, daß die sichtbare Oberfläche in zwei scharf getrennte Zonen mit verschiedener, aber innerhalb der Zone konstanter Winkelgeschwindigkeit zerfällt; in niedrigen Breiten (φ kleiner als etwa 10°) herrscht rasche Rotation, in den Breiten über 10° langsame. Auf der Sonne besteht dagegen eine kontinuierliche Abnahme der Rotationsgeschwindigkeit mit der Breite; außerdem hängt die Winkelgeschwindigkeit auch ab von der Höhe der betrachteten Schicht über dem Photosphärenniveau; die Beobachtungen zeigen, daß die Rotation um so rascher erfolgt, je höher eine Schicht liegt. Daher ist die nach den Polen zu eintretende Verlangsamung der Winkelgeschwindigkeit in den höheren Niveaus geringer als in der Photosphäre. In einer neueren Arbeit hat E. Schoenberg¹ die bei Jupiter beobachteten Vorgänge als atmosphärische Strömungen gedeutet, die durch Wärmequellen (Vulkane) einer halbstarren Oberfläche des Planeten verursacht werden. Der erzielte Erfolg legt es nahe, zu untersuchen, ob auch die ungleichmäßige Rotation der Sonne als atmosphärische Strömung gedeutet werden könne. Es ist in der Tat wahrscheinlich, daß die Breitenabhängigkeit der Sonnenrotation eine auf die Oberfläche und geringe

Tiefe beschränkte Erscheinung ist; denn nach Waldmeier² haben die fleckenerzeugenden Herde eine von der Breite unabhängige Rotationsgeschwindigkeit und deuten so die Existenz eines Kernes an, der in geringer Tiefe unter der Photosphäre beginnt und wie ein starrer Körper rotiert; seine Winkelgeschwindigkeit ist nach den Waldmeierschen Ergebnissen die rasche Geschwindigkeit, die am Äquator der Sonne herrscht.

Der erste, der es versuchte, die Vorgänge auf der Sonne als Strömung einer Atmosphäre nach dem Muster der Erdatmosphäre zu deuten, war V. Bjerknes³. Er ging am Schluß seiner Arbeit, die sich in erster Linie mit der Bildung der Sonnenflecke befaßte, auch auf die allgemeine Zirkulation der Sonnenatmosphäre ein und nahm eine Reihe von übereinandergelagerten Einzelzirkulationen zwischen Äquator und Pol an; die Meridionalbewegungen werden infolge der ablenkenden Kraft der Sonnenrotation in ost-westliche Strömungen verwandelt und ergeben so das Phänomen der breitenabhängigen Winkelgeschwindigkeit. Vor kurzer Zeit hat Czada⁴ eine formelmäßige Behandlung der Frage als hydrodynamisches Problem veröffentlicht. Er nimmt dabei innerhalb des Sonnenkörpers Strömungen in radialer und zonaler

² M. Waldmeier, Ergebnisse und Probleme der Sonnenforschung, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1941, S. 52.

³ V. Bjerknes, Astrophysic. J. 64, 93 [1926] = Contrib. Mt. Wilson Obs. 312 [1926].

⁴ I. K. Czada, Contrib. Konkoly Obs. Budapest-Svabéghi 19 [1949].

¹ E. Schoenberg, S.-B. math.-naturwiss. Abt. bayr. Akad. Wiss. 1948 = Mitt. d. Sternwarte München, Bd. 1, Nr. 1.



Richtung an und stellt den Geschwindigkeitsvektor durch eine empirische Formel dar, die einerseits die beobachtete Oberflächenströmung gut wiedergibt und andererseits eine verhältnismäßig einfache Integration der hydrodynamischen Gleichungen gestattet. Diese Lösung gibt nicht die beobachteten Meridionalströmungen in der Sonnenatmosphäre wieder.

Neuerdings ist versucht worden, die ungleichmäßige Rotation der Sonne als elektromagnetischen Vorgang zu deuten, vor allem von Alfvén⁵. Danach herrscht im Sonnenkörper ein elektrisches und damit auch ein magnetisches Feld, welches mit dem Geschwindigkeitsfeld im Gleichgewicht stehen muß; denn die Bewegung der Materie erzeugt Induktionsspannungen, während umgekehrt das Feld als mechanisch wirkende Kraft die Materie in Bewegung setzt. Ein vorgegebenes elektromagnetisches Feld muß daher eine bestimmte Geschwindigkeitsverteilung bedingen. Die Reibung, die das Geschwindigkeitsfeld hydrodynamisch beeinflusst, ist bei Alfvén nicht berücksichtigt.

Die vorliegende Arbeit faßt die Abhängigkeit der Rotationsgeschwindigkeit von Höhe und Breite als das Resultat aerodynamischer Strömungen ähnlich denen der Erdatmosphäre auf. Die Sonne hat einen Kern, der wie ein starrer Körper mit der raschen Äquatorgeschwindigkeit rotiert und in einer gewissen, zunächst unbekannten Tiefe unter der Photosphäre beginnt; alle über diesem Kern befindlichen Gasmassen werden zur „Atmosphäre“ gerechnet, obgleich man sich den Kern nicht etwa als festen Körper vorzustellen hat. Die Photosphäre, die für uns die optische Grenze des Sonnenkörpers ist, bedeutet in diesem Sinne nur eine Schicht innerhalb der Atmosphäre. Auf diese wirken verschiedene Kräfte ein; die Natur der äußeren Kräfte, die neben der Schwerkraft wirksam sind, ist a priori unbekannt; es können thermische Auftriebskräfte, hervorgerufen durch lokale Temperaturunterschiede, sein, es kann sich um Kräfte elektromagnetischer oder sonstiger Natur handeln. Auf jeden Fall verursachen sie eine Bewegung der atmosphärischen Gasmassen, die den hydrodynamischen Gleichungen folgen müssen. Durch innere Reibung beeinflussen sich die verschiedenen Schichten gegenseitig und schließlich tritt infolge der Rotation der Sonne die nach der Seite zu ablenkende Coriolis-Kraft auf. Aus den beobachteten Bewegungen ist zu ermitteln, welche Kräfte zusammenspielen müssen, um gerade diese Strömungen zu erzielen. Da dem Kern der Sonne, nach Waldmeier, die rasche Rotations-

geschwindigkeit des Äquators zuzuschreiben ist, liegt nicht ein Voreilen am Äquator, sondern vielmehr ein Zurückbleiben in den höheren Breiten vor; als Ursache ergibt sich die Coriolis-Kraft, die am Äquator verschwindet, in den höheren Breiten jedoch die Gasmassen in dem Sinne ablenkt, daß sie der Rotationsrichtung entgegen rückwärts strömen.

Die hier entwickelte Theorie schließt eine Erklärung des Phänomens durch elektromagnetische Kräfte nicht aus, beschränkt sich aber bewußt auf die hydrodynamische Seite des Problems. Nichts hindert, den äußeren Kräften elektromagnetische Natur beizulegen, falls spätere Beobachtungsergebnisse zeigen sollten, daß die Rotation der Sonne nur als elektromagnetisches Phänomen verstanden werden kann. Da bis heute nicht einmal die Existenz des allgemeinen Magnetfelds der Sonne außerhalb jedes Zweifels steht, erscheint es verfrüht, sich auf die Hypothese elektromagnetischer Kräfte als Ursache der ungleichmäßigen Sonnenrotation festzulegen.

Im folgenden wird gezeigt, wie man aus den beobachteten Strömungen ein Bild der gesamten Zirkulation und der Verteilung der äußeren Kräfte gewinnen kann. Der direkten Beobachtung sind die Bewegungskomponenten in zwei Koordinaten zugänglich; als Bewegung in Länge wird in jedem Punkt die Abweichung der Rotation von der schnellen Winkelgeschwindigkeit des Sonnenäquators gedeutet, die die Drehgeschwindigkeit des Kerns ist; die Bewegungen in Breite sind ebenfalls der direkten Beobachtung zu entnehmen. Stets ist nur ein mittlerer Strömungszustand betrachtet; ähnlich wie für die allgemeine Zirkulation der Erdatmosphäre die großräumigen Bewegungen, die sich im zeitlichen Mittel über große Gebiete einstellen, ausschließlich von Bedeutung sind, soll auch in der Sonnenatmosphäre von kurzlebigen, kleineren Gebilden, wie Flecken, Fackeln und Protuberanzen, abgesehen werden; sie dienen uns nur als Mittel, um beobachtungsmäßig die Richtung der allgemeinen Strömung, von der sie mitgetragen werden, zu erfassen.

1. Das vorhandene Beobachtungsmaterial

Über die Breitenabhängigkeit der Sonnenrotation liegt eine große Zahl von Beobachtungsreihen vor, welche das Phänomen auch in verschiedenen Höhen erfassen. Flecke, Fackeln und Protuberanzen dienen als Objekte, die die Winkelgeschwindigkeit anzeigen, und zwar entsprechen die Flecke dem untersten Niveau, der Photosphäre, die Fackeln einer mittleren

⁵ H. Alfvén, Ark. Mat., Astronom. Fysik, Ser. A 29, Nr. 12 [1943].

und die Protuberanzen der höchsten Höhe. Trotz einzelner Abweichungen ergab sich aus allen derartigen Untersuchungen das gleiche Bild. In allen Höhenlagen nimmt die Rotationsgeschwindigkeit vom Äquator zu den Polen ab, aber die Abnahme erfolgt um so langsamer, je höher die betreffende Schicht liegt. Darüber hinaus deuten manche Beobachtungsreihen an, daß am Äquator die Winkelgeschwindigkeit mit der Höhe anwächst; demnach wären in den äquatorialen Schichten über der Photosphäre Geschwindigkeiten vorhanden, die die Drehgeschwindigkeit des Kerns noch übertreffen. Nach d'Azambuja⁶ ist indes die Rotationsgeschwindigkeit am Äquator der Sonne in allen Niveaus die gleiche; der geringe Unterschied, den er zwischen Photosphäre und Protuberanzenniveau noch fand, liegt im Bereich der Beobachtungsunsicherheit. In den folgenden Untersuchungen ist eine Zunahme der Äquatorgeschwindigkeit mit der Höhe nicht berücksichtigt; es sei jedoch darauf hingewiesen, daß die entwickelte Theorie mit einer geringen Abänderung der numerischen Werte ihrer Parameter auch diesem Phänomen Rechnung tragen kann. Zur Darstellung der Winkelgeschwindigkeit als Funktion der Breite sollen die aus den Interpolationsformeln

$$\xi = 14^{\circ}40' - 2^{\circ}60' \sin^2 \varphi \text{ für die Photosphäre,}$$

$$\xi = 14^{\circ}40' - 2^{\circ}16' \sin^2 \varphi \text{ für das Protuberanzenniveau}$$

folgenden numerischen Werte benutzt werden; dabei ist φ die heliographische Breite und ξ der Drehwinkel pro siderischem Tag. Die Koeffizienten der beiden Formeln sind der zitierten Arbeit von d'Azambuja entnommen. Ist u die lineare Geschwindigkeit in

| | | | |
|----------------|--------|---------|---------|
| Breite: | 0°—10° | 10°—20° | 20°—30° |
| Fackeln: | + 0°3 | + 0°9 | + 1°6 |
| Protuberanzen: | + 3°5 | + 2°1 | + 1°3 |

Die Zahlen sind unverändert den beiden Arbeiten entnommen. Durch Glättung werden aus ihnen die Werte der Meridionalströmung für die Breiten 15°, 30°, 45°, 60° und 75° entnommen und mittels Division durch die Rotationsdauer in Bewegungen pro Tag umgerechnet. So ergeben sich die Meridionalgeschwindigkeiten der Tab. 1, in der eingeklammerte Werte durch Extrapolation gewonnen sind.

Leider ist es beobachtungsmäßig nicht möglich,

⁶ L. d'Azambuja, Sur la vitesse, angulaire de rotation des couches superficielles du soleil. Comité national français d'astronomie 1948, 52.

⁷ J. Tuominen, Z. Astrophysik 21, 96 [1941].

Länge und R der Radius der Sonne, dann gilt

$$u = R \eta \cos \varphi, \quad \eta = \xi - 14^{\circ}40'$$

und die numerischen Werte u folgen aus den Formeln

$$u = -2^{\circ}60' R \sin^2 \varphi \cos \varphi \quad \text{in der Photosphäre,} \quad (1)$$

$$u = -2^{\circ}16' R \sin^2 \varphi \cos \varphi \quad \text{im Protuberanzenniveau.}$$

Auch über die Strömung in Breite liegen Beobachtungsergebnisse vor. In der Photosphäre sind Meridionalströmungen, wie die Sonnenflecke zeigen, im zeitlichen Mittel verschwindend klein. Früher hielt man die Bewegungen der Sonnenflecke in Breite überhaupt für regellos; erst 1941 zeigte Tuominen⁷ aus den jahrzehntelangen Greenwicher Beobachtungsreihen, daß in Äquatornähe (φ kleiner als 16°) die Flecke eine systematische Bewegung in Richtung zum Äquator, in Breiten über 16° in Richtung zu den Polen aufweisen. Die von ihm abgeleiteten Geschwindigkeiten übersteigen kaum die Beobachtungsunsicherheit; da außerdem die Zweiteilung der Strömung in den höheren Schichten der Sonnenatmosphäre nicht auftritt, wollen wir alle Meridionalbewegungen im Photosphärenniveau vernachlässigen. Hingegen herrschen in der Höhe der Protuberanzen größere Meridionalströmungen in Richtung polwärts, deren Betrag d'Azambuja beobachtet hat⁸. Auch in dem mittleren Niveau, das von den Fackeln eingenommen wird, zeigen die Beobachtungen in Greenwich⁹ Bewegungen in Richtung zu den Polen. Die Beobachtung gleicher Objekte, die nach einer Sonnenrotation wieder erschienen, zeigten nach den beiden Beobachtungsreihen Verschiebungen in Breite vom Betrag $\Delta\varphi$:

bis zu den Polen selbst die Meridionalströmung zu bestimmen. Die Werte der Komponente u nach Gl. (1) und der Komponente v nach Tab. 1 werden der Theorie zugrunde gelegt.

2. Die Bewegungsgleichungen und ihre Vereinfachung

Die beobachteten Strömungsgeschwindigkeiten sollen hydrodynamisch gedeutet werden. Man sieht, daß

⁸ L. d'Azambuja u. M. d'Azambuja, Ciel et Terre, LX année, Nr. 7—9 [1944].

⁹ Monthly Notices Roy. Astronom. Soc. 85, 189 [1925].

die Geschwindigkeit in Länge wesentlich größer ist als die in Breite. In einer Gasmasse, die sich im rotierenden Koordinatensystem bewegt, erzeugt eine meridional gerichtete Kraft, etwa ein Druckgradient, stets dann eine rein zonale Strömung als Konsequenz der ablenkenden Coriolis-Kraft, wenn die innere Reibung verschwindet. Die ungleichmäßige Rotation der Sonne könnte in diesem Fall als Wirkung einer meridionalen Kraft auf eine reibungslose Gasmasse aufgefaßt werden. Da aber die Meridional Komponenten der Bewegung nicht ganz verschwinden, kann die Reibung nicht vernachlässigt werden; in den höheren Niveaus strömen die Gasmassen polwärts und müssen wegen der dadurch bedingten Ablenkung eine raschere Rotation aufweisen. Schon d'Azambuja hat darauf hingewiesen, daß diese Tatsache als Erklärung für die Zunahme der Winkelgeschwindigkeit mit der Höhe dienen kann⁶.

Wenn r , φ , λ räumliche Polarkoordinaten mit Anfangspunkt in der Sonnenmitte bedeuten, lauten die Bewegungsgleichungen eines Massenteilchens in dem mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Koordinatensystem¹⁰

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\cos^2\varphi(\dot{\lambda} - 2\omega)\dot{\lambda} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} + f_r - F_r - g, \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\sin\varphi\cos\varphi(\dot{\lambda} - 2\omega)\dot{\lambda} &= -\frac{1}{r\varrho}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + f_\varphi - F_\varphi, \\ r\cos\varphi\ddot{\lambda} + 2(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi)(\dot{\lambda} - \omega) &= -\frac{1}{r\varrho\cos\varphi}\frac{\partial p}{\partial\lambda} + f_\lambda - F_\lambda. \end{aligned} \quad (2)$$

Auf den rechten Seiten bedeutet ϱ die Dichte, p den Druck, die Größen F sind die Reibungskräfte und f die etwa wirksamen äußeren Kräfte, die nicht notwendig ein Potential zu besitzen brauchen. Alle Bewegungen sollen als stationär angenommen werden; die in manchen Beobachtungsreihen angedeutete Schwankung der Rotationsgeschwindigkeit im Laufe des 11-jährigen Sonnenzyklus ist nur unsicher belegt und zudem von geringer Amplitude. Der stationäre Zustand stellt sich in der Weise ein, daß alle wirkenden Kräfte im Gleichgewicht stehen und in der gesamten Atmosphäre eine nur vom Ort abhängige Geschwindigkeitsverteilung herrscht. Wir führen in die Gln. (2) die Geschwindigkeitskomponenten

$$u = r\dot{\lambda}\cos\varphi, \quad v = r\dot{\varphi}, \quad w = \dot{r}$$

ein und schreiben die totalen Differentialquotienten nach der Zeit in bekannter Weise als partielle Ableitungen nach den Koordinaten; ferner betrachten wir die Ausdehnung der Atmosphäre als klein und ersetzen r durch den Sonnenradius R ; wo Ableitungen nach r vorkommen, sei der Buchstabe z für die radiale Richtung gewählt. So folgt aus (2) das System (3)

$$\begin{aligned} w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{v}{R}\frac{\partial w}{\partial\varphi} + \frac{u}{R\cos\varphi}\frac{\partial w}{\partial\lambda} - \frac{u^2 + v^2}{R} &+ 2\omega u\cos\varphi = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} + f_z - F_z - g, \\ w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{v}{R}\frac{\partial v}{\partial\varphi} + \frac{u}{R\cos\varphi}\frac{\partial v}{\partial\lambda} + \frac{wv}{R} + \frac{u^2}{R}\operatorname{tg}\varphi &- 2\omega u\sin\varphi = -\frac{1}{\varrho R}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + f_\varphi - F_\varphi, \\ w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{v}{R}\frac{\partial u}{\partial\varphi} + \frac{u}{R\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{wu}{R} - \frac{uv}{R}\operatorname{tg}\varphi &+ 2\omega w\cos\varphi - 2\omega v\sin\varphi \\ &= -\frac{1}{r\varrho\cos\varphi}\frac{\partial p}{\partial\lambda} + f_\lambda - F_\lambda. \end{aligned} \quad (3)$$

Hinzu tritt als Gl. (4) die Kontinuitätsbedingung, die in Polarkoordinaten bei stationärer Bewegung das folgende Aussehen hat:

$$\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\sec\varphi}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}(v\cos\varphi) + \frac{\sec\varphi}{R}\frac{\partial u}{\partial\lambda} = 0. \quad (4)$$

Die Gln. (3) und (4) müssen vereinfacht werden, um eine Integration zu ermöglichen. Die hier eingeführten Vernachlässigungen sind im wesentlichen dieselben, die Prandtl¹¹ benutzt hat, um die Strömungen in der Erdatmosphäre zu studieren. Wir benutzen folgende Annahmen:

I. Die Vertikalerstreckung der Sonnenatmosphäre ist klein gegenüber dem Sonnenradius R .

II. Zonale Kräfte und Gradienten sind nicht vorhanden.

III. Ursache der Reibung ist der vertikale Massenaustausch.

IV. Quadrate und Produkte von Geschwindigkeiten werden als klein vernachlässigt.

V. Die Dichte ϱ wird als Konstante betrachtet.

Voraussetzung I diene schon oben als Rechtfertigung, um überall $r = R$ zu setzen. Sie bedingt ferner

¹⁰ E. Schoenberg, *Astronom. Nachr.* **273**, 113 [1942].

¹¹ F. Kropatschek, *Die Mechanik der großen Zirkulation der Atmosphäre*, Beitr. z. Physik d. freien Atmosphäre **22**, 272 [1935].

nach den Sätzen der Grenzschichttheorie, daß alle Größen, die Vertikalbeschleunigungen darstellen, verschwinden; zusammen mit IV folgt daraus, daß die ganze linke Seite der ersten Gl. (3) verschwindet. Die Voraussetzung II ist aus Symmetriegründen zu rechtfertigen. Nach III ist der vertikale Massenaustausch als Reibungsursache vorherrschend gegenüber der molekularen Reibung; er wird hervorgerufen durch die Turbulenz der auf- und absteigenden Gasmassen und überträgt Bewegungsimpulse nur in der radialen Richtung. Die Annahme turbulenter Reibung steht im Einklang mit der Anschauung, daß sich unmittelbar unter der Photosphäre eine Schicht konvektiven Gleichgewichts befindet. Die turbulenten Zusatzbewegungen überlagern sich der hier allein betrachteten systematischen Strömung als Störung, beeinflussen sie aber andererseits durch die von ihnen verursachte Reibung. Der analytische Ausdruck für die durch Massenaustausch verursachten Reibungskräfte lautet

$$F_{\varphi} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad F_{\lambda} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial u}{\partial z} \right);$$

die Reibung in der senkrechten Richtung kann vernachlässigt werden.

Voraussetzung IV, welche die Linearisierung des Systems (3) erzwingt, ist nur erlaubt, wenn die Geschwindigkeiten gegenüber der Rotationsgeschwindigkeit wirklich klein sind. Nach (1) ist die tägliche Längenänderung gegenüber dem starr rotierenden Kern gleich $2^{\circ}.6 \sin^2 \varphi$, in mittleren Breiten also etwa ein Zehntel der $14^{\circ}.4$ pro Tag betragenden Rotation; auch in Polnähe übersteigt die Strömungsgeschwindigkeit nicht den Betrag von ein Fünftel der Rotation, und die Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung dürfte keinen schwerwiegenden Einfluß haben. Eine Ausnahme bildet die unmittelbare Umgebung des Äquators, denn dort sind wegen des Faktors $\sin \varphi$ auch die übrigen Glieder der Gln. (3) klein, so daß umgekehrt die quadratischen Glieder mit ihnen von gleicher Größenordnung werden und nicht mehr vernachlässigt werden dürften. Gerade am Äquator der Sonne sind aber die Strömungsgeschwindigkeiten, die nach (1) dem $\sin^2 \varphi$ proportional sind, besonders klein.

Außer den genannten Annahmen soll noch der Austauschkoefizient A als konstant angesehen werden, da wir über seine Veränderlichkeit innerhalb der Sonnenatmosphäre nichts wissen und auch keine plausible Hypothese machen können. So erhält man aus (3) und (4) das System

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial z} = f_z - g, \quad (5.1)$$

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{A R}{\varrho} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 2 R \omega u \sin \varphi + f_{\varphi}, \quad (5.2)$$

$$0 = \frac{A R}{\varrho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 R \omega v \sin \varphi, \quad (5.3)$$

$$R \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} - v \operatorname{tg} \varphi = 0, \quad (5.4)$$

welches den weiteren Untersuchungen zugrundeliegt.

3. Die Lösung der Bewegungsgleichungen

Die Sonnenatmosphäre erstreckt sich von der Oberfläche des starren Kerns ($z=0$) bis zur mittleren Höhe der Protuberanzen ($z=H$). Statt z soll weiterhin eine Koordinate $x = z/H$ verwendet werden.

Da der direkten Beobachtung nur die Strömungskomponenten u und v zugänglich sind, betrachten wir (5.2) und (5.3) und führen die folgenden Abkürzungen ein:

$$\frac{4 H^4 \varrho^2 \omega^2 \sin^2 \varphi}{A^2} = 4 k^4,$$

$$\frac{2 k^4}{R \omega \sin^2 \varphi} \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - f_{\varphi} \right) = g(x, \varphi). \quad (6)$$

Die Funktion g , die im wesentlichen die in meridionaler Richtung wirksamen Kräfte einschließlich des Druckgradienten repräsentiert, ist irgendeine Funktion des Ortes. Aus Gl. (5.2) und (5.3) kann man v eliminieren, indem man (5.3) zweimal nach z bzw. nach x differenziert und das dabei entstehende Glied v'' aus (5.2) einsetzt; unter Benutzung der Abkürzungen (6) erhält man für u die Gl. (7):

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 4 k^4 u = -g(x, \varphi) \sin \varphi. \quad (7)$$

Diese lineare Differentialgleichung vierter Ordnung für u enthält nur Differentiationen nach x ; man kann sie als gewöhnliche Differentialgleichung mit der unabhängigen Variablen x ansehen, die einen Parameter φ enthält. Ihre Lösung wird erst eindeutig durch Angabe von vier Randbedingungen. Obgleich der Verlauf der Funktion g unbekannt ist, kann man die allgemeine Form der Lösung angeben. Bei gegebenen Randbedingungen (sie werden unten genau definiert werden) läßt sich diejenige Lösung von (7), die den Randbedingungen genügt, in eine nach den zugehörigen Eigenfunktionen fortschreitende Reihe entwickeln; die Funktion g beeinflusst nur

die numerischen Werte der Entwicklungskoeffizienten. Jede Strömung in einer Atmosphäre, die dem System (5) unterworfen ist, muß durch einen derartigen Ansatz darstellbar sein. Wenn man die Entwicklungskoeffizienten numerisch aus den Beobachtungen so bestimmt, daß diese optimal dargestellt werden, kann man rückwärts durch Einsetzung der Reihe in die Gleichung (7) die Funktion g und damit die örtliche Verteilung der in meridionaler Richtung wirkenden Kräfte erhalten.

Da am „Boden“ die Geschwindigkeiten verschwinden und nach (5.3) v proportional zu u'' ist, haben wir für $x = 0$ die Randbedingungen $u(0) = u''(0) = 0$. Für die Werte von u und v an der oberen Grenze $x = 1$ wählen wir die beobachteten Werte, die aus Formel (1) bzw. Tab. 1 hervorgehen; dabei ist u'' mit v durch Gl. (5.3) verbunden, die unter Verwendung von (6) lautet:

$$v = -\frac{1}{2k^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Es ist also diejenige Lösung der Differentialgleichung (7) aufzusuchen, die den Randbedingungen

$$u(0) = 0, \quad u''(0) = 0, \quad (8)$$

$u(1), u''(1)$ nach den beobachteten Werten genügt. Die Randwerte hängen von φ ab, wie überhaupt die ganze Gleichung noch den Parameter φ enthält.

Das Randwertproblem (7), (8) ist inhomogen, denn die rechten Seiten sind von Null verschieden. Das zugehörige homogene Problem, welches entsteht, indem man in (7) und in (8) die rechten Seiten gleich Null setzt, ist im allgemeinen unlösbar. Es lautet:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 4k^4 u = 0, \quad (9)$$

$$u(0) = 0, \quad u''(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad u''(1) = 0. \quad (10)$$

Die allgemeine Lösung von (9) kann als Summe von vier mit je einer willkürlichen Konstanten multiplizierten Einzellösungen geschrieben werden; es ist aber praktisch immer unmöglich, diese vier Konstanten so zu wählen, daß die vier homogenen Bedingungen (10) erfüllt werden, denn man kann ihnen nur Genüge leisten, wenn alle vier Konstanten verschwinden. Da das homogene Problem unlösbar ist, folgt, daß das inhomogene Problem (7), (8) eine bestimmte Lösung hat.

Wenn man statt (9) die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + (4k^4 + \lambda) u = 0 \quad (11)$$

betrachtet und unter λ einen beliebigen Parameter versteht, dann gibt es gewisse Werte λ , für die (11) eine den Bedingungen (10) genügende Lösung besitzt; den Beweis dafür liefert die Theorie der Integralgleichungen. Die betreffenden Werte sind die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ der Gl. (11) für die Randbedingungen (10) und die zugehörigen Lösungen sind die Eigenfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots$.

Die gesuchte Lösung von (7), die die Randbedingungen (8) erfüllt, ermitteln wir in zwei Schritten. Erst stellen wir eine Funktion u_0 her, die zwar die Differentialgleichung (7), aber nicht die Randbedingungen (8), sondern die homogenen Randbedingungen (10) erfüllt. Dieser Funktion fügen wir als zweiten Schritt diejenige Lösung der homogenen Differentialgleichung (9) hinzu, die die vorgeschriebenen Randbedingungen (8) erfüllt. Über die erste Funktion u_0 lehrt die Theorie der Integralgleichungen, daß sie nach den Eigenfunktionen der Gl. (11) entwickelt werden kann und das Aussehen hat:

$$u_0 = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots$$

Die numerischen Werte der Koeffizienten c_p sind von der Funktion $g(x, \varphi)$ in (7), also von der Druckverteilung in der Sonnenatmosphäre, abhängig. Dieser speziellen Lösung von (7) brauchen wir nur die allgemeine Lösung der homogenen Gl. (9) zuzufügen, um die allgemeine Lösung von (7) zu erhalten. Wie oben schon erwähnt, ist speziell diejenige Lösung von (9) zu wählen, die unsere Randbedingungen (8) erfüllt. Wenn U_1, U_2, U_3, U_4 irgend vier unabhängige Lösungen der homogenen Gl. (9) sind, dann hat unsere gesuchte Lösung des Randwertproblems (7), (8) sicher das Aussehen

$$u = a_1 U_1 + a_2 U_2 + a_3 U_3 + a_4 U_4 + b_1 \varphi_1 + b_2 \varphi_2 + \dots \quad (12)$$

Dabei können alle Konstanten $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, \dots$ in irgendeiner Weise von φ abhängen.

Als Form der Lösungen können die Funktionen U_i in der folgenden Weise gewählt werden¹²:

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathfrak{Cof} k x \cos k x, & U_2 &= \mathfrak{Cof} k x \sin k x, \\ U_3 &= \mathfrak{Sin} k x \cos k x, & U_4 &= \mathfrak{Sin} k x \sin k x. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Gl. (9) für die Randbedingungen (10) sind die folgenden:

$$4k^4 + \lambda_n = -(n\pi)^4, \quad \varphi_n = \sin n\pi x.$$

¹² s. K a m k e, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen I. Leipzig 1942, Akademische Verlagsgesellschaft, S. 525/526.

Folglich nimmt die Reihe (12), die die allgemeine Form der Lösung darstellt, die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} u = & a_1 \mathfrak{Cof} k x \cos k x + a_2 \mathfrak{Cof} k x \sin k x \\ & + a_3 \mathfrak{Sin} k x \cos k x + a_4 \mathfrak{Sin} k x \sin k x \quad (13) \\ & + b_1 \sin \pi x + b_2 \sin 2 \pi x + \dots \end{aligned}$$

Die Konstanten dieses Ansatzes sind nun so zu bestimmen, daß die Randbedingungen (8), welche am einen Rand ($x=1$) aus den Beobachtungen folgen, erfüllt werden. Das bedingt zunächst, daß die Größen a_1 und a_4 verschwinden; denn U_1 ist die einzige unter den Funktionen U_i, φ_i , die am Nullpunkt nicht verschwindet, und U_4 die einzige, deren zweite Ableitung dort von Null verschieden ist. Daher hat die Funktion u sowie die aus ihr folgende Funktion v sicher die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} u = & a_2 \mathfrak{Cof} k x \sin k x + a_3 \mathfrak{Sin} k x \cos k x \\ & + b_1 \sin \pi x + b_2 \sin 2 \pi x + \dots, \\ v = & -a_2 \mathfrak{Sin} k x \cos k x + a_3 \mathfrak{Cof} k x \sin k x \\ & + \frac{b_1 \pi^2}{2 k^2} \sin \pi x + \frac{4 b_2 \pi^2}{2 k^2} \sin 2 \pi x + \dots, \end{aligned} \quad (14)$$

in der sämtliche Koeffizienten von φ abhängen. Die numerischen Werte der b_i hängen vom Verlauf der Funktion $g(x, \varphi)$ ab und damit von der Verteilung der meridionalen Kräfte. Kennt man umgekehrt die b_i aus den Beobachtungen, dann hat man die Möglichkeit, die Funktion $g(x, \varphi)$ zu bestimmen.

Die Konstanten sind so zu bestimmen, daß in jeder Breite die in Abschnitt 1 mitgeteilten Beobachtungen dargestellt werden. Es sind aber außerdem noch zwei Parameter unbekannt, die für die numerische Anwendung der Formeln (14) notwendig sind; das sind k und eine Größe x_0 , welche angibt, in welcher Höhe innerhalb der Sonnenatmosphäre die Photosphäre liegt; in dieser Höhe $x = x_0$ müssen u und v die durch die Beobachtungen vorgeschriebenen Werte annehmen. Weder k noch x_0 gehen aber in (14) linear ein und man kann beide nur dadurch bestimmen, daß man die Koeffizienten von (14) der Reihe nach unter verschiedenen Annahmen für k und x_0 berechnet und prüft, welche Werte die günstigste Darstellung ergeben. Einen groben Anhaltspunkt über die Größenordnung erhält man aus folgender Überlegung. Wenn man annimmt, daß Differentialquotienten nach z in erster Näherung proportional zu $1/H$, also $\partial/\partial z \sim 1/H$ ist, dann gilt nach Gl. (5.3) $v \sim u/2k^2$ und im Mittel über φ : $2k^2 = \bar{u}/\bar{v}$.

Diese Beziehung wird auf das Niveau der Protuberanzen angewendet. Als mittlere Geschwindigkeiten betrachten wir das arithmetische Mittel der beobachteten Werte in den Breiten $\varphi = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ und 75° . So folgt

$$2k^2 = 0,54/0,036 = 15.$$

Der Mittelwert von k über alle Breiten [k ist nach (6) proportional zu $|\sin \varphi|$] liegt zwischen 2 und 3, womit die Größenordnung festgelegt ist. Ein erster numerischer Versuch wurde mit

$$k = 3,0 |\sin \varphi|$$

unternommen. Eine erste Abschätzung für x_0 nahm der Wert $2/3$ an; er folgte aus der Überlegung, daß das Rotationsgesetz der Photosphäre dem der Protuberanzen ähnlicher ist als der starren Rotation des Kerns und daher vermutlich die Photosphäre dem oberen Niveau näher liegt; die Annahme $x_0 = 2/3$ bedeutet, daß der Höhenunterschied Photosphäre—Protuberanzen halb so groß ist wie die Tiefe des Kerns unter der Photosphäre.

Wenn man numerische Werte für k und x_0 angenommen hat, lassen sich die Konstanten in (14) berechnen. Die Rechnung ist für jede Breite gesondert zu führen, hier wurden die Werte $\varphi = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ und 75° herausgegriffen. Die Werte von u und v im Niveau H , also für $x = 1$, sind numerisch aus Abschnitt 1 zu entnehmen und ergeben die beiden Konstanten a_2 und a_3 ; die Eigenfunktionen verschwinden bei $x = 1$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} a_2 \mathfrak{Cof} k \sin k + a_3 \mathfrak{Sin} k \cos k &= u(1), \\ -a_2 \mathfrak{Sin} k \cos k + a_3 \mathfrak{Cof} k \sin k &= v(1) \end{aligned}$$

als System zur Bestimmung von a_2 und a_3 . Wenn man diese beiden Werte kennt, zieht man die beobachteten u und v im Photosphärenniveau x_0 heran, um b_1 und b_2 zu ermitteln; die höheren Reihenglieder wollen wir vernachlässigen, die Konvergenz der Reihe ist durch die Theorie gesichert. So folgen b_1 und b_2 durch Auflösung des Systems

$$\begin{aligned} b_1 \sin \pi x_0 + b_2 \sin 2 \pi x_0 \\ = u(x_0) - a_2 \mathfrak{Cof} k x_0 \sin k x_0 - a_3 \mathfrak{Sin} k x_0 \cos k x_0, \\ b_1 \sin \pi x_0 + 4 b_2 \sin 2 \pi x_0 \\ = \frac{2 k^2}{\pi^2} (v(x_0) + a_2 \mathfrak{Sin} k x_0 \cos k x_0 - a_3 \mathfrak{Cof} k x_0 \sin k x_0). \end{aligned}$$

Die Benutzung der oben begründeten ersten Hypothese

$$k = 3,0 |\sin \varphi|, \quad x_0 = 2/3$$

lieferte die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{array}{rclcl} \varphi = 15^\circ & u = & -0,056 \mathfrak{C} \mathfrak{f} k x \sin k x + 0,032 \mathfrak{S} \mathfrak{i} n k x \cos k x - 0,14 \sin \pi x - 0,023 \sin 2 \pi x \\ 30 & & -0,089 & + 0,066 & -0,52 & -0,09 \\ 45 & & -0,068 & + 0,102 & -0,95 & -0,14 \\ 60 & & -0,032 & + 0,094 & -1,05 & -0,14 \\ 75 & & -0,009 & + 0,054 & -0,70 & -0,09 \end{array}$$

und die entsprechenden Formeln für v [s. Gl. (14)]. Als Einheit der Geschwindigkeit ist dabei diejenige gewählt, bei der ein Massenteilchen pro Tag eine Strecke zurücklegt, die vom Sonnenmittelpunkt unter dem Winkel von ein Grad erscheint; bei einem Sonnenradius von 690 000 km sind das 500 km pro Stunde. Für die der Beobachtung zugänglichen Schichten der Photosphäre, der Protuberanzen und der Fackeln, deren Höhe genau gleich dem Mittel zwischen den beiden anderen Niveaus angenommen wurde, ergeben die Formeln die Werte der Tab. 2.

Für Photosphäre und Protuberanzenniveau stimmen u und v mit den Beobachtungen nach Gl. (1) bzw. Tab. 1 genau überein; das ist selbstverständlich,

da diese Beobachtungen der Koeffizientenbestimmung zugrundelagen. Im mittleren Niveau der Fackeln ergibt unsere Lösung erhebliche Meridionalströmungen, die nach Tab. 1 keineswegs vorhanden sind. Das weist darauf hin, daß die Annahme über die Parameter k und x_0 fehlerhaft ist und die Rechnung mit anderen Werten zu wiederholen ist. Es wurden nun verschiedene Versuchshypothesen durchgerechnet, die im einzelnen nicht wiedergegeben werden sollen; eine gute Darstellung aller Beobachtungen ergab schließlich die Annahme

$$k = 5,0 \sqrt{\sin \varphi}, \quad x_0 = 0,8.$$

Mit diesen Werten resultieren die folgenden Formeln der Strömungsgeschwindigkeit u :

$$\begin{array}{rclcl} \varphi = 15^\circ & u = & -0,0021 \mathfrak{C} \mathfrak{f} k x \sin k x + 0,0245 \mathfrak{S} \mathfrak{i} n k x \cos k x - 0,19 \sin \pi x + 0,00 \sin 2 \pi x \\ 30 & & + 0,0128 \mathfrak{C} \mathfrak{f} k x \sin k x + 0,0243 \mathfrak{S} \mathfrak{i} n k x \cos k x - 0,67 \sin \pi x + 0,01 \sin 2 \pi x \\ 45 & & + 0,0203 \mathfrak{C} \mathfrak{f} k x \sin k x + 0,0103 \mathfrak{S} \mathfrak{i} n k x \cos k x - 1,10 \sin \pi x + 0,07 \sin 2 \pi x \\ 60 & & + 0,0154 \mathfrak{C} \mathfrak{f} k x \sin k x + 0,0004 \mathfrak{S} \mathfrak{i} n k x \cos k x - 1,14 \sin \pi x + 0,12 \sin 2 \pi x \\ 75 & & + 0,0075 \mathfrak{C} \mathfrak{f} k x \sin k x - 0,0018 \mathfrak{S} \mathfrak{i} n k x \cos k x - 0,74 \sin \pi x + 0,10 \sin 2 \pi x \end{array} \quad (15)$$

Numerisch ergibt das die Werte der Tab. 3.

Die v im Fackelniveau zeigen vollkommene Übereinstimmung mit den beobachteten Werten.

4. Das Strömungsbild in der Sonnenatmosphäre

In den Gln. (15) und numerisch in Tab. 3 liegt diejenige Lösung der Bewegungsgleichungen vor, die mit den Beobachtungen der zugänglichen Schichten übereinstimmt; sie erlaubt ein vollständiges Strömungsbild zu konstruieren, welches auch über diejenigen Schichten eine Aussage macht, die nicht beobachtbar sind. Aus den Gln. (14) erhält man u und durch zweimalige Differentiation v ; schließlich ergibt

| Breite | Meridionalgeschwindigkeit v | | |
|--------|-------------------------------|-------------------------|------------------------------|
| | Photosphäre | Mittl. Niveau (Fackeln) | Hohes Niveau (Protuberanzen) |
| 15° | 0.00 | + 0.03 | + 0.08 |
| 30 | 0.00 | + 0.06 | + 0.04 |
| 45 | 0.00 | (+ 0.06) | + 0.02 |
| 60 | 0.00 | — | + 0.02 |
| 75 | 0.00 | — | (+ 0.02) |

Tab. 1. Meridionalgeschwindigkeiten in verschiedenen Höhen und Breiten.

die dritte Gl. (5) die Komponente w . Die hierbei notwendige Integration ist numerisch ausgeführt worden. Die Resultate sind in den Tab. 4, 5 u. 6 enthalten; sie geben die Geschwindigkeitskomponenten für die Höhenlagen $x = 0,0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$ und $1,0$ wieder; $0,8$ entspricht der Photosphäre, $1,0$ dem Protuberanzenniveau. Einheit ist, wie schon erwähnt, diejenige Geschwindigkeit, die heliozentrisch einer Be-

| Breite | Phot. | Fackeln | Protub. |
|-------------------------|--------|---------|---------|
| $\eta = u \sec \varphi$ | | | |
| 15° | — 0.16 | — 0.15 | — 0.14 |
| 30 | — 0.65 | — 0.56 | — 0.54 |
| 45 | — 1.30 | — 1.14 | — 1.08 |
| 60 | — 1.95 | — 1.69 | — 1.62 |
| 75 | — 2.43 | — 2.09 | — 2.02 |
| v | | | |
| 15° | — 0.00 | + 0.12 | + 0.08 |
| 30 | — 0.00 | + 0.19 | + 0.04 |
| 45 | — 0.00 | + 0.24 | + 0.02 |
| 60 | — 0.00 | + 0.14 | + 0.02 |
| 75 | — 0.00 | + 0.14 | + 0.02 |

Tab. 2. Berechnete Geschwindigkeiten; Annahme $k = 3,0 \sqrt{\sin \varphi}$, $x_0 = 2/3$, in Einheiten von Grad pro Tag ≈ 500 km/Stde.

| Breite | Phot. | Fackeln | Protub. |
|-------------------------|--------|---------|---------|
| $\eta = u \sec \varphi$ | | | |
| 15° | — 0.16 | — 0.15 | — 0.14 |
| 30 | — 0.65 | — 0.60 | — 0.54 |
| 45 | — 1.30 | — 1.20 | — 1.08 |
| 60 | — 1.95 | — 1.78 | — 1.62 |
| 75 | — 2.43 | — 2.21 | — 2.02 |
| v | | | |
| 15° | 0.00 | + 0.04 | + 0.08 |
| 30 | 0.00 | + 0.06 | + 0.04 |
| 45 | 0.00 | + 0.06 | + 0.02 |
| 60 | 0.00 | + 0.09 | + 0.03 |
| 75 | 0.00 | + 0.07 | + 0.02 |

Tab. 3. Geschwindigkeiten unter der Annahme
 $k = 5,0 \mid \sin \varphi, x_0 = 0,8$.

| Höhe x | $\varphi = 15^\circ$ | 30° | 45° | 60° | 75° |
|-------------|----------------------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 0.2 | — 0,10 | — 0,36 | — 0,55 | — 0,54 | — 0,33 |
| 0.4 | — 0,17 | — 0,61 | — 0,95 | — 0,96 | — 0,61 |
| 0.6 | — 0,17 | — 0,66 | — 1,06 | — 1,12 | — 0,72 |
| 0.8 | — 0,16 | — 0,56 | — 0,91 | — 0,98 | — 0,63 |
| 1.0 | — 0,14 | — 0,46 | — 0,77 | — 0,81 | — 0,53 |

Tab. 4. Zenale Strömung u .

wegung von ein Grad pro Tag entspricht, das sind 500 km/Stde.

Nachdem die Lösung des Gleichungssystems auch numerisch vorliegt, erscheint eine Prüfung der Vereinfachungen angebracht, unter denen die Lösung gewonnen wurde. Wir benutzen die dritte Gleichung des Systems (3), welche lautet:

$$2v \sin \varphi - \left(\frac{w}{\omega} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v}{R\omega} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{w}{R\omega} u + \frac{uv}{R\omega} \operatorname{tg} \varphi - 2w \cos \varphi \right) = -\frac{1}{\omega} F_z. \quad (16)$$

Die eingeklammerten Glieder waren als klein vernachlässigt worden. Zur Probe sei die linke Seite der Gleichung einmal mit und einmal ohne Berücksichtigung der eingeklammerten Glieder berechnet; die Probe soll für die Geschwindigkeiten in 45° Breite ausgeführt werden, da hier die schnellste Strömung herrscht und daher auch die größten Fehler zu erwarten sind. Alle in der Rechenprobe auftretenden Differentialquotienten sind numerisch bestimmt worden. So ergab die linke Seite bei Einsetzung der gefundenen Lösung die Werte der Tab. 7.

| Höhe x | $\varphi = 15^\circ$ | 30° | 45° | 60° | 75° |
|-------------|----------------------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 0.2 | — 0,07 | — 0,14 | — 0,11 | — 0,05 | — 0,01 |
| 0.4 | — 0,10 | — 0,20 | — 0,21 | — 0,16 | — 0,09 |
| 0.6 | — 0,07 | — 0,14 | — 0,19 | — 0,20 | — 0,12 |
| 0.8 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 1.0 | + 0,08 | + 0,04 | + 0,02 | + 0,02 | + 0,02 |

Tab. 5. Meridionale Strömung v .

| Höhe x | $\varphi = 15^\circ$ | 30° | 45° | 60° | 75° |
|-------------|----------------------|---------|---------|---------|---------|
| 0.0 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 0.2 | + 0,002 | + 0,000 | — 0,002 | — 0,005 | — 0,002 |
| 0.4 | + 0,006 | + 0,002 | — 0,006 | — 0,009 | — 0,008 |
| 0.6 | + 0,011 | + 0,004 | — 0,009 | — 0,016 | — 0,018 |
| 0.8 | + 0,013 | + 0,006 | — 0,010 | — 0,019 | — 0,024 |
| 1.0 | + 0,012 | + 0,006 | — 0,009 | — 0,018 | — 0,023 |

Tab. 6. Radiale Strömung w .

| Höhe | ohne eingeklammerte Glieder | mit eingeklammerte Glieder |
|------|-----------------------------|----------------------------|
| 0,0 | 0,00 | 0,00 |
| 0,2 | — 0,16 | — 0,16 |
| 0,4 | — 0,30 | — 0,29 |
| 0,6 | — 0,27 | — 0,25 |
| 0,8 | 0,00 | + 0,02 |
| 1,0 | + 0,03 | + 0,05 |

Tab. 7. Betrag der linken Seite von Gl. (16).

Die Unterschiede sind genügend klein, um die eingeführten Vernachlässigungen nachträglich zu rechtfertigen. Die beobachteten Werte sind ihrerseits nur auf einige Prozent sicher.

Ein Blick auf die Zahlen der Tab. 4, 5 u. 6 zeigt, daß im Gesamtströmungsbild die ost-westliche Komponente stark überwiegt; es werden gewaltige Linear- geschwindigkeiten bis über 500 km/Stde. erreicht, das ist das Zehnfache der auf der Erde üblichen Größenordnungen. Der horizontale Windvektor erleidet mit zunehmender Höhe eine Drehung, ähnlich wie in der untersten Schicht der Erdatmosphäre, in der die Reibung eine Rolle spielt. Diese hindert den Wind an seiner Tendenz, den Isobaren parallel zu strömen, und erst mit zunehmender Höhe, d. h. abnehmendem Reibungseinfluß, kann der Wind auf die isobarenparallele Richtung drehen. In der Meteorologie wird dieses Verhalten durch die „Ekman-Spirale“ wiedergegeben und die vorliegende Untersuchung stellt ein auf die Sonne übertragenes Analogon dar; die hier verwendete Gl. (7) ist die gleiche, aus der die Me-

teorologie die Ekman-Spirale ableitet; der Unterschied besteht nur darin, daß im terrestrischen Fall wegen der geringen linearen Erstreckung der Reibungsschicht (einige hundert Meter) der Druckgradient konstant ist; auf der Sonne ist der Druckgradient mit der Höhe veränderlich.

Die Zahlenwerte der Tab. 4, 5 u. 6 zeigen, daß hier bis in die höchsten Atmosphärenschichten eine durch Reibung verursachte Winddrehung stattfindet;

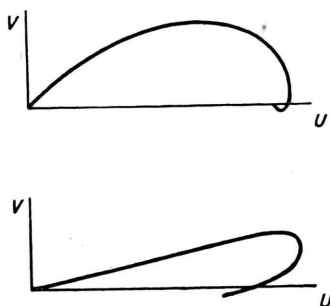


Abb. 1. Zusammenhang zwischen zentraler und meridionaler Windgeschwindigkeit (Ekman-Spirale) in den Atmosphären der Erde (oben) und der Sonne (unten) in 45° Breite.

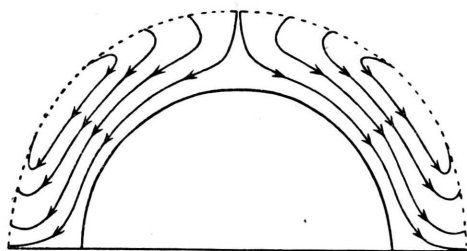


Abb. 2. Strömungsbild der Sonnenatmosphäre (schematisch).

die auf der Erde nur ganz niedrige Reibungsschicht erstreckt sich auf der Sonne infolge der großen Zähigkeit bzw. Turbulenz durch die ganze Atmosphäre. Wenn man diesen Unterschied durch eine Maßstabänderung berücksichtigt, sieht die Abhängigkeit des Windvektors von der Höhe auf beiden Himmelskörpern ähnlich aus (vgl. Abb. 1). Die für die Sonne gültige Figur zeigt die Spirale in verzerrierter Form; das rührt von der Höhenabhängigkeit des Druckgradienten her; wäre die antreibende Kraft in allen Höhen konstant, dann würden beide Diagramme identisch sein.

Der Austauschkoefizient A läßt sich aus der Konstanten k leicht numerisch berechnen. Es ist nach (6)

$$k = 5,0 \left| \sin \varphi = H \right| \frac{\rho \omega \sin \varphi}{A}.$$

Hier ist es notwendig, einen numerischen Wert für H , die Höhe der Sonnenatmosphäre, einzusetzen, von der die Niveaudifferenz Photosphäre—Protuberanzen wegen $x_0 = 0,8$ den fünften Teil ausmacht. Da von den Protuberanzen meist die Endpunkte auf Sonnenbildern vermessen werden, beziehen sich die ermittelten Strömungen auf ein Niveau, das nicht wesentlich über der Chromosphäre liegt. Nimmt man als Höhe dieses Niveaus 10 000 km an, dann würde der starr rotierende Sonnenkern 40 000 km unter der Photosphäre liegen. Für den Austauschkoefizienten erhält man $A/\rho = 0,3 \cdot 10^{13} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$.

Es ist von Interesse, diesen Wert mit anderen Bestimmungen zu vergleichen. Aus dem Helligkeitsunterschied zwischen den Granula und der ungestörten Photosphäre hat Siedentopf¹³ unter Benutzung seiner Theorie der Konvektion in Sternatmosphären für die Sonne einen Austauschkoefizienten von $0,2 \cdot 10^6$ abgeleitet; als Dichte nahm er $\rho = 0,3 \cdot 10^{-7}$ an, so daß man erhalten würde $A/\rho = 0,7 \cdot 10^{13} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$.

Auf verschiedenen Wegen hat Czada⁴ den Austauschkoefizienten abgeleitet. Er zeigte, daß Messungen von Bruggencate und Grotian über die Lebensdauer der Granulationselemente auf den Wert $A/\rho = 0,62 \cdot 10^{13} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$ führen; aus seiner eigenen Theorie erhielt er Werte, welche A/ρ zwischen $0,8 \cdot 10^{13}$ und $5 \cdot 10^{13}$ ergaben. Die Tatsache, daß alle Bestimmungsmöglichkeiten des Austauschkoefizienten nahe gleiche Werte liefern, zeigt, daß die Behandlung der Gasbewegungen auf der Sonne als turbulente Strömung irgendwie den Tatsachen entspricht. Die sehr geringe Dichte der Sonnenatmosphäre bedingt eine große kinematische Zähigkeit und dadurch den übertragenden Einfluß der Reibung auf alle Bewegungen.

Die Strömung selbst hat nach den Zahlen der Tab. 4, 5 u. 6 den folgenden Verlauf. In geringer Höhe über dem Kern sind alle v negativ, die Gasmassen fließen von den Polen zum Äquator; auch die u sind negativ, eine Folge der ablenkenden Coriolis-Kraft. Die radiale Komponente ist am Äquator positiv und in hohen Breiten negativ, die Gase steigen also am Äquator hoch und an den Polen nieder. In den oberen Schichten der Atmosphäre ist v positiv, hier findet das Abströmen der am Äquator aufgestiegenen Gase zu den Polen statt. So ergibt sich das Bild einer geschlossenen meridionalen Zirkulation, der sich die Ablenkung infolge des rotierenden Koordinatensystems überlagert. Die Abb. 2 gibt

¹³ H. Siedentopf, *Astronom. Nachr.* **255**, 157 [1935].

| x | $\varphi = 15$ | 30 | 45 | 60 | 75 |
|-----|----------------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 0,2 | + 0,11 | + 0,55 | + 1,09 | + 1,24 | + 0,83 |
| 0,4 | + 0,18 | + 0,90 | + 1,89 | + 2,28 | + 1,61 |
| 0,6 | + 0,18 | + 0,92 | + 2,10 | + 2,66 | + 1,93 |
| 0,8 | + 0,11 | + 0,59 | + 1,39 | + 1,83 | + 1,37 |
| 1,0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |

Tab. 8. Werte der Funktion $g(x, \varphi) 10^{-3}$.

das Strömungsbild im Meridianschnitt wieder; der stark umrandete Kreis ist der starr rotierende Kern der Sonne, die gestrichelte Linie ist das mittlere Protuberanzenniveau, bis zu dem sich die Untersuchung erstreckt; in der Höhe 0,8 würde die der Deutlichkeit halber nicht eingezeichnete Photosphäre liegen.

Um diesem kinematischen Bild eine dynamische Deutung geben zu können, muß die Verteilung der äußeren Kräfte bestimmt werden. Über ihre physikalische Natur ist nichts bekannt; sie sollen daher einfach mit dem Druckgradienten zusammengerechnet, also die ganze in meridionaler Richtung wirksame Kraft als Druckgradient aufgefaßt werden; damit wird nur den unbekannten Kräften ein vorläufiger Name gegeben, der keine Festlegung in physikalischer Hinsicht bedeuten soll. Um $g(x, \varphi)$ zu berechnen, muß man die gefundene Lösung (15) in die Differentialgleichung (7) einsetzen und findet

$$\begin{aligned} \varphi = 15^\circ \quad 10^{-3} g(x) &= + 0,19 \sin \pi x \\ 30 &+ 0,96 \sin \pi x - 0,02 \sin 2 \pi x \\ 45 &+ 2,10 \sin \pi x - 0,16 \sin 2 \pi x \\ 60 &+ 2,60 \sin \pi x - 0,31 \sin 2 \pi x \\ 75 &+ 1,86 \sin \pi x - 0,28 \sin 2 \pi x. \end{aligned}$$

Der Faktor 10^{-3} ist hinzugefügt worden, um Zahlen von der Größenordnung 1 zu erhalten. Den numerischen Verlauf der Funktion g gibt die Tab. 8 wieder.

Die Druckgradienten sind überall positiv, der Druck steigt demnach mit der Breite an; die Kraft ist von den Polen zum Äquator gerichtet, was schon aus dem Drehsinn der Zirkulation, die die Gasmassen ausführen, hervorging.

Die physikalische Natur der Meridionalkraft bleibt unbestimmt. Wenn es sich um ein thermisches Phänomen handelt, müßte die Sonne am Äquator heißer sein als an den Polen; die Energiequellen im Sonneninneren müßten dann eine Konzentration zum Äquator aufweisen.

Man kann auch die Größe des für eine solche Erklärung notwendigen Temperaturunterschiedes zwischen Pol und Äquator abschätzen. Man würde bei dieser Hypothese den Druckgradienten als einzige

in meridionaler Richtung wirkende Kraft ansehen, also in Gl. (6) $f_\varphi = 0$ setzen. Sie ergäbe dann für den Druckunterschied Δp zwischen Pol und Äquator

$$\frac{1}{\varrho} \Delta p = \int_0^{\pi/2} \frac{R \omega \sin^2 \varphi}{2 k^4} g(x, \varphi) d\varphi \approx \frac{\pi R \omega \sin^2 \varphi}{4 k^4} \bar{g}.$$

Bei der numerischen Auswertung setzen wir für $g(x, \varphi)$ nach Tab. 7 den mittleren Wert 10^3 ein; da alle Geschwindigkeiten in heliozentrischem Grad pro Tag gegeben sind, ist $g(x, \varphi)$ zwecks Reduktion auf das cgs-System noch mit dem Faktor $R \arccos 1^\circ / 86400 = 1,3 \cdot 10^4$ zu multiplizieren; also ist der Druckunterschied mit den Zahlenwerten

$$R = 6,9 \cdot 10^{10}, \quad \omega = 0,3 \cdot 10^{-5},$$

$$4 k^4 / \sin^2 \varphi = 2,5 \cdot 10^3, \quad \bar{g} = 1,3 \cdot 10^7$$

zu berechnen und ergibt

$$\frac{1}{\varrho} \Delta p = 3,1 \cdot 10^9 \text{ cgs-Einheiten.}$$

Mit dem Temperaturunterschied ΔT hängt Δp durch die Gasgleichung zusammen

$$\Delta T = \frac{\mu}{R} \frac{\Delta p}{\varrho}, \quad (R \text{ ist hier die Gaskonstante})$$

numerisch folgt also

$$\Delta T = 370^\circ \mu.$$

Da das Molekulargewicht im äußersten Fall den Wert 2 ein wenig überschreitet, ist unter allen Umständen der Temperaturunterschied kleiner als 100° . Wenn also die Sonne am Äquator um weniger als 100° heißer ist als an den Polen, würde das als Erklärung der in ihrer Atmosphäre beobachteten Strömungen genügen. Dieser geringe Unterschied kann so erhebliche Wirkungen erzielen, weil die Dichte in der Sonnenatmosphäre sehr niedrig ist; die geringsten äußeren Kräfte können die Materie in rasche Bewegung setzen.

Das dynamische Bild, welches eine mögliche Deutung der systematischen Strömungen in der Sonnenatmosphäre darstellt, ist demnach das folgende: Es herrscht auf der Sonne eine äquatorwärts gerichtete Meridionalkraft, deren physikalische Natur unbestimmbar ist; es kann sich um elektromagnetische Kräfte handeln oder um thermische Kräfte infolge einer höheren Temperatur am Äquator gegenüber dem Pol. Diese Kraft setzt die Gasmassen in den Schichten unmittelbar über dem starr rotierenden

Kern in eine zum Äquator gerichtete Bewegung. Infolge der Ablenkung im rotierenden Koordinatensystem strömen die äquatorfernen Gase entgegen der Rotationsrichtung und verursachen in höheren Breiten die gegenüber dem Äquator verlangsamte Drehgeschwindigkeit. In den höheren Schichten, über der Photosphäre, müßte, da hier die Gasmassen polwärts strömen, der entgegengesetzte Fall eintreten; infolge der Ablenkung müßten die äquatorfernen Gasmassen mit vermehrter Rotationsgeschwindigkeit vorausseilen. Aber die starke turbulente Reibung

zwingt sie, sich fast vollständig dem Bewegungszustand der unteren Schichten anzupassen. Sie eilen gegenüber diesen nur ein wenig voraus, und daher ist die Abnahme der Rotationsgeschwindigkeit mit der Breite in größeren Höhen etwas langsamer als in und unterhalb der Photosphäre. Dieses Bild, welches die wichtigsten Beobachtungstatsachen erklärt, könnte als Grundlage dienen, um die Strömungen in der Sonnenatmosphäre mechanisch zu deuten.

Hrn. Prof. Schoenberg bin ich für Anregung und Ratschläge zu dieser Arbeit zu größtem Dank verpflichtet.

Der wirksame, mittägliche Rekombinationskoeffizient der F_2 -Schicht berechnet aus deren Grenzfrequenzverlauf während des Mögel-Dellinger-Effektes am 19. Nov. 1949

VON WALTER BECKER UND WALTER DIEMINGER

Aus dem Institut für Ionosphärenforschung in der Max-Planck-Gesellschaft, Lindau (Harz)

(Z. Naturforsch. 5a, 308—311 [1950]; eingegangen am 28. April 1950)

Als wirksamer mittäglicher Rekombinationskoeffizient wurde aus der Ionisationszunahme in der F_2 -Schicht während des Mögel-Dellinger-Effektes am 19. Nov. der Wert $\alpha_{\text{eff } F_2} = 1,9 \cdot 10^{-10}$ errechnet. Dieser Wert ist ein Grenzwert; der tatsächliche kann nur größer sein, aber nicht kleiner. Er ist von derselben Größenordnung wie die in der Literatur angegebenen, nächtlichen Werte. Die Trägerproduktion in der F_2 -Schicht war im Beginn des Mögel-Dellinger-Effektes doppelt so groß wie die normale Ionisierung.

Am 19. November zwischen 11.30 und 13.00 Uhr (alle Zeiten in dieser Arbeit werden in MEZ angegeben) fand ein Mögel-Dellinger-Effekt* statt; er unterschied sich von allen bisher von uns beobachteten und uns aus der Literatur bekannten Mögel-Dellinger-Effekten^{2,3} durch eine plötzliche, starke Zunahme der Grenzfrequenz aller beobachteten Schichten, nämlich der E_1 -, E_2 - und F_2 -Schicht. Nach der Störung kehrte die Grenzfrequenz in allen Schichten wieder auf ihren Normalwert zurück. Unter bestimmten Voraussetzungen kann man aus dem zeitlichen Ablauf dieses Vorganges auf den wirksamen Rekombinationskoeffizienten der einzelnen Schichten

schließen. Diese Voraussetzungen werden in dem vorliegenden Beispiel am besten von den Vorgängen in der F_2 -Schicht erfüllt. Darum kann der mittägliche Wert des wirksamen Rekombinationskoeffizienten nur für diese Schicht berechnet werden; für die Werte der anderen Schichten ist nur eine Abschätzung möglich.

Berechnung des Rekombinationskoeffizienten

In Abb. 1 ist der Verlauf der ordentlichen Grenzfrequenz einer jeden Schicht in Abhängigkeit von der Tageszeit aufgetragen. Die Kurve f_d gibt die jeweils niederste Frequenz an, bei der wir mit unserer Apparatur noch Echos aus der Ionosphäre erhalten haben.

Unsere Beobachtungen werden normalerweise jede volle und jede halbe Stunde durchgeführt. Wegen des M.-D.-Effektes wurde jedoch um 11.47 Uhr eine zusätzliche Aufnahme gemacht. Bei diesen Aufnahmen wird der Frequenzbereich von 1—16 MHz in 8 Min. durchlaufen, und zwar werden die einzelnen Frequenzen 2; 4; 8; 11,3 MHz jeweils nach 2; 4;

* Über die gleichzeitige Zunahme der Höhenstrahlung und weitere Einzelheiten vgl.¹

¹ R. Müller, O. Augustin u. W. Menzel, A. Ehmert, H. Salow, A. Sittkus, W. Dieminger u. K. H. Geisweid, J. Bartels, J. Atmospheric terrestrial Physics I [1950] (im Druck).

² L. V. Berkner u. H. W. Wells, Terr. Magn. 42, 183 [1937].

³ B. Beckmann, Die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen, Bd. 2, S. 208, Akad. Verlagsges. Geest und Portig K.G., Leipzig 1948.